

吴森, 卢友军, 陈丛莉, 等. SICHR 谣言传播模型的动态分析与最优控制[J]. 智能计算机与应用, 2025, 15(2): 103-110.
DOI: 10.20169/j.issn.2095-2163.24073102

SICHR 谣言传播模型的动态分析与最优控制

吴森, 卢友军, 陈丛莉, 刘诗辰

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 考虑到谣言传播过程中存在谣言感染者可能会因外界影响而进入冷静状态和辟谣者积极辟谣的情况, 本文结合冷静和辟谣机制, 在 SIR 模型的基础上, 构建了一个 SICHR 谣言传播模型。根据传播规则给出了在均匀网络下的传播动力学方程, 通过下一代矩阵法计算了基本再生数。通过 Routh-Hurwitz 判据分析了平衡点的局部渐近稳定性, 利用 LaSalle 不变原理分析了无谣言平衡点的全局渐近稳定性。选择平台对信息的审核力度作为控制变量, 提出了一种最优控制策略。最后, 由仿真实验可知, 冷静机制、辟谣机制以及平台审核措施对于抑制谣言传播有着重要的影响。

关键词: SICHR 模型; 冷静机制; 辟谣机制; 基本再生数; 稳定性; 最优控制

中图分类号: TP393

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2025)02-0103-08

Dynamic analysis and optimal control of sichr rumor propagation model

WU Sen, LU Youjun, CHEN Congli, LIU Shichen

(School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

Abstract: Considering that the rumor infected persons may enter a calm state due to external influences and rumor tellers actively disprove rumors in the process of rumor spreading, this paper combined the calm and rumor dispelling mechanism and built a SICHR rumor spreading model based on the SIR model. According to the propagation rules, the propagation dynamics equation under homogeneous network is given, and the basic reproduction number is calculated by the next generation matrix method. The local asymptotic stability of the equilibrium point is analyzed by Routh-Hurwitz criterion, and the global asymptotic stability is analyzed by LaSalle's invariance principle. An optimal control strategy is proposed by selecting the information audit intensity of the platform as the control variable. Finally, it can be seen from the simulation experiment that the calmness mechanism, rumor-refuting mechanism and platform audit measures have an important impact on the suppression of rumors.

Key words: SICHR model; calmness mechanism; rumor refuting mechanism; basic reproduction number; stability; optimal control

0 引言

网络谣言的传播对网络安全和社会稳定带来极大威胁^[1]。例如, 在日本核泄漏事件中, 网络谣言称食用碘盐能防核辐射, 导致公众恐慌性购买, 造成市场波动。这凸显了网络谣言的严重影响。因此, 研究网络谣言传播机制与特性, 对制定谣言控制策略具有重要意义。

鉴于谣言传播与传染病传播之间的相似性, Daley 和 Kendall^[2]首次提出了 DK 谣言传播模型, 这一模型为后续的谣言传播研究奠定了重要的理论

基础。随后, Maki^[3]在 DK 模型的基础上进行改进, 提出了 MK 谣言传播模型。Zanelte^[4]研究了小世界网络上谣言传播的动态行为, 揭示了其传播的临界值, 为理解网络结构对谣言传播的影响提供了重要依据。根据节点度不同, 复杂网络可被分为均匀网络和异质网络。为此, 国内外学者研究了均匀网络和异质网络结构下的谣言传播模型。Moreno 等^[5]研究了随机无标度网络上的谣言传播过程。Yu 等^[6]考虑了营销账户对谣言传播的影响, 在均匀网络结构中提出了一个谣言传播模型。Tong 等^[7]考虑到网络结构的异质性, 构建了随机谣言传播模型。

基金项目: 贵州省省级科技计划资助项目(黔科合基础[2019]1159号)。

作者简介: 吴森(1998—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 复杂信息分析与计算研究。

通信作者: 卢友军(1985—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向: 大数据及算法分析研究。Email: yjlu111@126.com。

收稿日期: 2024-07-31

Luo 等^[8]在异质网络中构建了带非关联性的谣言传播模型。研究发现,网络结构对谣言的传播有重要的影响。

大多数的谣言研究都是对 SIR 模型的扩展,基于其思想,以进一步探索谣言的传播机制,学者们建立起了考虑不同因素的新模型。Jiang 等^[9]为分析微博突发事件的谣言传播过程,建立了一个带敏感态、积极态、消极态和恢复态的谣言传播模型。Hu 等^[10]提出了带有交叉扩散的谣言传播动态模型。Choi 等^[11]提出了一种考虑传播者在谣言传播过程中停止传播的新模型。Yao 等^[12]引入危险人群和潜伏者,提出了一个具有易感态、危险态、感染态、潜伏态和恢复态的谣言传播模型。Yu 等^[13]考虑了人们在谣言传播时的不同心理,将谣言传播者分为正常传播者和恶意传播者。先前的谣言传播模型研究取得了一定成果,但是其没有考虑到辟谣机制的影响。

在谣言传播过程中,具有丰富生活经验和知识的群体能够识别谣言的存在并积极辟谣。因此,一些学者考虑了谣言传播中辟谣机制。例如,Guo 等^[14]提出个人辟谣和媒体辟谣两种机制,并证实了媒体辟谣可以更快地降低传播者的密度。Ghosh 等^[15]提出了一个带辟谣机制的谣言传播模型,并分析了模型的混沌现象。Jie 等^[16]考虑辟谣者对于谣言传播的影响。Pan 等^[17]考虑了媒体辟谣机制,提出了一个新的谣言传播模型。除了上述控制谣言传播的措施外,本文引入了另一种冷静机制,即加大法律知识普及的力度,令更多传播谣言的人意识到随意传播谣言所需付出的严重代价,迫使其进入冷静状态,停止传播谣言。

本文基于 SIR 模型,考虑冷静和辟谣机制,构建了 SICHR 谣言传播模型。分别围绕该模型的平衡点存在性、基本再生数和模型在平衡点处的稳定性等动力学性质进行分析,并提出了一种最优控制策略。

1 SICHR 谣言传播模型

在 SICHR 谣言传播模型中,将种群分为 5 类:易感者 S (表示在线社交网络中容易接触到谣言的人);感染者 I (表示知晓谣言并有意传播谣言的人);辟谣者 C (表示主动澄清真相的人);冷静者 H (表示情绪缓和并停止传播谣言的人);免疫者 R (表示知晓谣言但不传播的人)。

SICHR 模型传播规则如下:

(1)假设单位时间内网络用户的注册率为 b 。易感者 S 、感染者 I 、辟谣者 C 、冷静者 H 和免疫者 R 可能会注销账号,即存在迁出率 ε ;

(2)当易感者 S 分别与感染者 I 和辟谣者 C 接触时,缺乏主见的易感者 S 以 β 的概率变为感染者 I ,有一定经验的易感者 S 以 η 的概率变为辟谣者 C ;

(3)感染者 I 可能出于自身情况和外界因素考虑,进而进入冷静状态,以 σ 的概率变为冷静者 H 。冷静者 H 可能会反思自身的错误,并愿意改过自新,积极辟谣,即存在 θ 的概率变为辟谣者 C ;

(4)感染者 I 、辟谣者 C 和冷静者 H 可能会遗忘了相关谣言,分别以 δ 、 φ 和 μ 的概率变为免疫者 R 。

SICHR 模型的传播示意图见图 1。

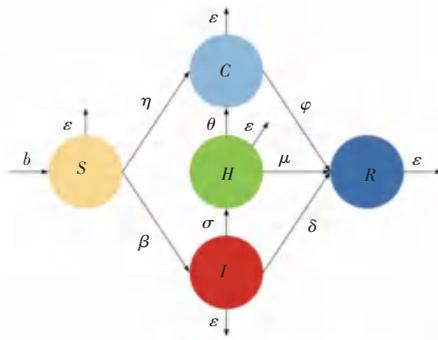


图 1 SICHR 模型的传播示意图

Fig. 1 Propagation diagram of SICHR model

在 t 时刻, $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $C(t)$ 、 $H(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示易感者、感染者、辟谣者、冷静者及免疫者的种群密度。 $\bar{k} = \sum_{k=1}^n kp(k)$ 表示网络平均度。在均匀网络架构下,模型的传播动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = b - \beta \bar{k} S(t) I(t) - \eta \bar{k} S(t) C(t) - \varepsilon S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta \bar{k} S(t) I(t) - (\varepsilon + \sigma + \delta) I(t) \\ \dot{C}(t) = \eta \bar{k} S(t) C(t) + \theta H(t) - (\varepsilon + \varphi) C(t) \\ \dot{H}(t) = \sigma I(t) - (\theta + \varepsilon + \mu) H(t) \\ \dot{R}(t) = \delta I(t) + \mu H(t) + \varphi C(t) - \varepsilon R(t) \end{cases} \quad (1)$$

因为种群密度是非负的,所以有 $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $C(t) \geq 0$, $H(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$ 。假设种

群的密度之和 $N(t) = S(t) + I(t) + C(t) + H(t) + R(t)$, 结合式(1)可得:

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - \varepsilon N(t) \quad (2)$$

由式(2)可得:

$$\Omega = \{ (S(t), I(t), C(t), H(t), R(t)) \in R_+^5 \mid 0 \leq S(t) + I(t) + C(t) + H(t) + R(t) \leq b/\varepsilon \} \quad (3)$$

由于系统(式(1))的前 4 个式子不含 $R(t)$, 因此只需考虑如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = b - \beta k S(t) I(t) - \eta k S(t) C(t) - \varepsilon S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta k S(t) I(t) - (\varepsilon + \sigma + \delta) I(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = \eta k S(t) C(t) + \theta H(t) - (\varepsilon + \varphi) C(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \sigma I(t) - (\theta + \varepsilon + \mu) H(t) \end{cases} \quad (4)$$

2 平衡点和基本再生数

基本再生数 R_0 是判断谣言传播潜力的指标, 对于谣言传播研究至关重要。无谣言平衡点 E_0 是指经过一定时间后, 系统中谣言不再传播的状态。而谣言盛行平衡点 E_* 则表示谣言仍在传播, 且达到相对稳定的状态。现基于 E_0 , 采用下一代矩阵法^[18]来计算 R_0 。对于系统(式(4)), 令所有式子的右端等于 0, 易得 $E_0 = (b/\varepsilon, 0, 0, 0)$ 。令 $X = (I, S, C, H)^T$, 系统(式(4))可被表示为:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X) \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{\varepsilon + \sigma + \delta}{\beta k} \\ I_* &= \frac{[b\beta k - \varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)](\theta + \varepsilon + \mu)[\beta(\varepsilon + \varphi) - \eta(\varepsilon + \sigma + \delta)]}{\beta k(\varepsilon + \sigma + \delta)(\theta + \varepsilon + \mu)[\beta(\varepsilon + \varphi) - \eta(\varepsilon + \sigma + \delta)] + \beta k \eta \theta \sigma} \\ C_* &= \frac{\theta \sigma \beta [b\beta k - \varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)]}{\beta k(\varepsilon + \sigma + \delta)(\theta + \varepsilon + \mu)[\beta(\varepsilon + \varphi) - \eta(\varepsilon + \sigma + \delta)] + \beta k \eta \theta \sigma} \\ H_* &= \frac{\sigma [b\beta k - \varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)][\beta(\varepsilon + \varphi) - \eta(\varepsilon + \sigma + \delta)]}{\beta k(\varepsilon + \sigma + \delta)(\theta + \varepsilon + \mu)[\beta(\varepsilon + \varphi) - \eta(\varepsilon + \sigma + \delta)] + \beta k \eta \theta \sigma} \end{aligned}$$

$$F(X) = \begin{pmatrix} \beta k S(t) I(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(X) = \begin{pmatrix} (\varepsilon + \sigma + \delta) I(t) \\ \beta k S(t) I(t) + \eta k S(t) C(t) + \varepsilon S(t) - b \\ (\varepsilon + \varphi) C(t) - \eta k S(t) C(t) - \theta H(t) \\ (\theta + \varepsilon + \mu) H(t) - \sigma I(t) \end{pmatrix}$$

在 E_0 处的雅克比矩阵分别为:

$$\bar{F}(E_0) = \begin{pmatrix} \beta k b / \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V}(E_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon + \sigma + \delta & 0 & 0 & 0 \\ \beta k b / \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon + \varphi - \eta k b / \varepsilon & -\theta \\ -\sigma & 0 & 0 & \theta + \varepsilon + \mu \end{pmatrix} \quad (6)$$

因此, 基本再生数如下式:

$$R_0 = \frac{\beta k b}{\varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)} \quad (7)$$

假设 $E_* = (S_*, I_*, C_*, H_*)$, 结合式(4)可得:

$$\begin{cases} b - \beta k S_* I_* - \eta k S_* C_* - \varepsilon S_* = 0 \\ \beta k S_* I_* - (\varepsilon + \sigma + \delta) I_* = 0 \\ \eta k S_* C_* + \theta H_* - (\varepsilon + \varphi) C_* = 0 \\ \sigma I_* - (\theta + \varepsilon + \mu) H_* = 0 \end{cases} \quad (8)$$

通过计算式(8), 可得:

3 稳定性分析

下面将分析系统(式(4))在平衡点处的局部渐近稳定性,以及在 E_0 处的全局渐近稳定性。

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_1 - \varepsilon & -\beta\bar{k}b/\varepsilon & 0 & 0 & \dot{y} \\ \dot{\bar{e}}_2 & 0 & 0 & 0 & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_3 & \beta\bar{k}b/\varepsilon - (\varepsilon + \sigma + \delta) & 0 & 0 & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_4 & 0 & 0 & 0 & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_5 & 0 & 0 & 0 & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_6 & 0 & \sigma & 0 & \dot{u} \end{pmatrix} \begin{matrix} \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{u} \\ \dot{u} \\ \dot{u} \\ \dot{u} \end{matrix} \quad (9)$$

由式(9)有

$$|\lambda E - J(E_0)| = \begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -\theta \\ 0 & -\sigma & 0 & \lambda + \theta + \varepsilon + \mu \end{vmatrix} = a_3(\lambda + \theta + \varepsilon + \mu)(\lambda + \varepsilon)a_2$$

其中, $a_1 = \beta\bar{k}b/\varepsilon$, $a_2 = \lambda - \beta\bar{k}b/\varepsilon + (\varepsilon + \sigma + \delta)$, $a_3 = \lambda + \varepsilon + \varphi - \eta\bar{k}b/\varepsilon$ 。

所以对应的特征值为:

$$\lambda_1 = -(\theta + \varepsilon + \mu) < 0$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon < 0$$

$$\lambda_3 = \eta\bar{k}b/\varepsilon - (\varepsilon + \varphi)$$

$$\lambda_4 = \beta\bar{k}b/\varepsilon - (\varepsilon + \sigma + \delta) = (\varepsilon + \sigma + \delta)(R_0 - 1)$$

当 $R_0 < 1$ 且 $\varepsilon + \varphi > \eta\bar{k}b/\varepsilon$ 时,有 $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$, 根据 Routh-Hurwitz 判据^[19]可知,在 E_0 处,系统(式(4))是局部渐近稳定的。

定理 2 如果 $P_1P_2 - P_3 > 0$ 且 $P_3(P_1P_2 - P_3) - P_1^2P_4 > 0$, 那么系统(式(4))在 E_* 处是局部渐近稳定的。

证明 系统(式(4))在 E_* 处的雅克比矩阵为

$$J(E_*) = \begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_1 & a_4 & a_5 & -\eta S_* \bar{k} & 0 & \dot{y} \\ \dot{\bar{e}}_2 & \beta\bar{k}I_* & a_6 & 0 & 0 & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_3 & \eta\bar{k}C_* & 0 & \eta S_* \bar{k} - (\varepsilon + \varphi) & \theta & \dot{u} \\ \dot{\bar{e}}_4 & 0 & \sigma & 0 & -(\theta + \varepsilon + \mu) & \dot{u} \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中, $a_4 = -\beta\bar{k}I_* - \eta C_* \bar{k} - \varepsilon$, $a_5 = -\beta\bar{k}S_*$, $a_6 = \beta\bar{k}S_* - (\varepsilon + \sigma + \delta)$ 。

由式(10)可知

$$|\lambda E - J(E_*)| =$$

定理 1 如果 $R_0 < 1$, 且 $\varepsilon + \varphi > \eta\bar{k}b/\varepsilon$, 那么系统(式(4))在 E_0 处是局部渐近稳定的。

证明 系统(式(4))在 E_0 处的雅克比矩阵为

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_4 & -a_5 & \eta S_* \bar{k} & 0 \\ -\beta\bar{k}I_* & \lambda & 0 & 0 \\ -\eta\bar{k}C_* & 0 & \lambda + (\varepsilon + \varphi) - \eta\bar{k}S_* & -\theta \\ 0 & -\sigma & 0 & \lambda + \theta + \varepsilon + \mu \end{vmatrix}$$

所以对应的特征方程为:

$$\lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0 \quad (11)$$

其中,

$$P_1 = \beta\bar{k}I_* + \eta\bar{k}C_* + 2\varepsilon + \theta + \mu$$

$$P_2 = \beta^2\bar{k}^2I_*S_* + \eta^2\bar{k}^2S_*C_* + (\theta + \varepsilon + \mu)(\beta I_* \bar{k} + \eta C_* \bar{k} + 2\varepsilon + \varphi - \eta\bar{k}S_*)$$

$$P_3 = [(\varepsilon + \varphi) - \eta\bar{k}S_*] \beta^2\bar{k}^2I_*S_* + (\theta + \varepsilon + \mu)[\beta^2\bar{k}^2I_*S_* + \eta^2\bar{k}^2S_*C_* + (\varepsilon + \varphi - \eta\bar{k}S_*)(\beta I_* \bar{k} + \eta C_* \bar{k} + \varepsilon)]$$

$$P_4 = (\theta + \varepsilon + \mu)(\varepsilon + \varphi - \eta\bar{k}S_*)(\beta^2\bar{k}^2I_*S_*) + \theta\eta S_* I_* \bar{k}^2\sigma\beta$$

当 $P_1P_2 - P_3 > 0$ 且 $P_3(P_1P_2 - P_3) - P_1^2P_4 > 0$ 时,根据 Routh-Hurwitz 判据可知,在 E_* 处,系统(式(4))是局部渐近稳定的。

定理 3 如果 $R_0 < 1$, 那么系统(式(4))在 E_0 处是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{\varepsilon + \sigma + \delta} I(t)$$

对 $V(t)$ 求导可得:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon + \sigma + \delta} \cdot \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon + \sigma + \delta} [\beta\bar{k}S(t)I(t) - (\varepsilon + \sigma + \delta)I(t)] = \frac{\beta\bar{k}S(t)I(t)}{\varepsilon + \sigma + \delta} - I(t) \leq \frac{\beta\bar{k}bI(t)}{\varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)} - I(t) =$$

$$(R_0 - 1)I(t)$$

当 $R_0 < 1$ 时, 可得 $dV(t)/dt \leq 0$, 当且仅当 $I(t) = 0$ 时, 有 $dV(t)/dt = 0$, 对应于 E_0 。根据 LaSalle 不变原理^[20], 在 E_0 处, 系统(式(4))是全局渐近稳定的。

4 最优控制策略

本节考虑了 SICHR 谣言传播模型的最优控制策略。在系统(式(4))中添加一个控制变量 $u(t)$, 其表示平台对信息的审核力度。定义控制集如下:

$$U = \{u(t) \mid u(t) \in [0, 1], t \in T\} \quad (12)$$

式中的 $[0, T]$ 表示添加控制策略后的总体时间间隔。基于此, 定义最优目标函数:

$$J(u(t)) = \int_0^T k_1 I(t) + \frac{1}{2} k_2 u^2(t) dt \quad (13)$$

其中, k_1, k_2 为常数; k_1 表示感染者权重; k_2 表示对平台信息的审核力度的权重; $k_2 u^2(t)$ 表示审核措施的相关成本; $J(u(t))$ 表示控制谣言传播的总代价。

受约束于下式:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= b - (1 - u(t))\beta k S(t)I(t) - \eta k S(t)C(t) - \varepsilon S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - u(t))\beta k S(t)I(t) - (\varepsilon + \sigma + \delta)I(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \eta k S(t)C(t) + \theta H(t) - (\varepsilon + \varphi)C(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \sigma I(t) - (\theta + \varepsilon + \mu)H(t) \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 需要寻找最优控制 u^* , 使得 $J(u^*) = \min J(u(t))$ 。

对于(13)式和控制系统(式(14)), 在 U 中存在 u^* 使得 $J(u^*) = \min_{u(t) \in U} J(u(t))$, 其中 U 是紧凸集。

定义 Hamilton 函数如下:

$$\begin{aligned} W = (S, I, C, H, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) &= k_1 I(t) + \frac{1}{2} k_2 u^2(t) + \\ &\rho_1 [b - (1 - u(t))\beta k S(t)I(t) - \eta k S(t)C(t) - \varepsilon S(t)] + \rho_2 [(1 - u(t))\beta k S(t)I(t) - (\varepsilon + \sigma + \delta)I(t)] + \rho_3 [\eta k S(t) \times C(t) + \theta H(t) - (\varepsilon + \varphi)C(t)] + \rho_4 [\sigma I(t) - (\theta + \varepsilon + \mu)H(t)] \end{aligned}$$

其中, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 是协态变量。

定理 4 令 u^* 是最优控制变量, S^*, I^*, C^* ,

H^* 是系统(式(14))的最优状态量, 则存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 满足下式:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \rho_1 [(1 - u(t))\beta k I^* + \eta k C^* + \varepsilon] - \rho_2 (1 - u(t))\beta k I^* - \rho_3 \eta k C^* \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= -k_1 + \rho_1 (1 - u(t))\beta k S^* + \rho_2 [\varepsilon + \sigma + \delta - (1 - u(t))\beta k S^*] - \rho_4 \sigma \\ \frac{d\rho_3}{dt} &= \rho_1 \eta k S^* + \rho_3 (\varepsilon + \varphi - \eta k S^*) \\ \frac{d\rho_4}{dt} &= -\rho_3 \theta + \rho_4 (\theta + \varepsilon + \mu) \end{aligned}$$

边界条件 $\rho_i(T) = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 对应的最优控制变量如下式:

$$u^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\rho_2 - \rho_1)\beta k S^* I^*}{k_2}, 1 \right\}, 0 \right\}$$

证明 当满足 u^* 为最优控制变量, S^*, I^*, C^*, H^* 为系统(14)的最优状态量时, 由 Pontryagins 最大值原理可知

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial S}, \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial I}, \frac{d\rho_3}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial C}, \frac{d\rho_4}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial H}$$

且边界条件为 $\rho_i(T) = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 。根据最优条件, 当 $u(t) = u^*$ 时, 有 $\partial W / \partial u = 0$, 因此

$$u^* = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\beta k S^* I^*}{k_2}$$

根据所定义的控制集 U 可得

$$u^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\rho_2 - \rho_1)\beta k S^* I^*}{k_2}, 1 \right\}, 0 \right\}$$

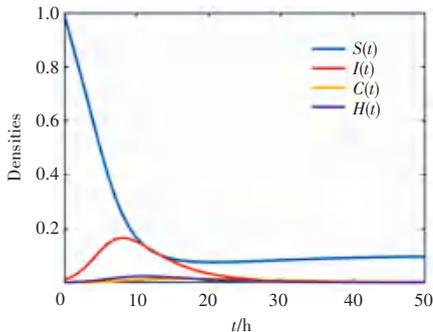
5 数值仿真

本节主要验证理论结果的正确性, 以及分析重要参数对于谣言传播的影响。

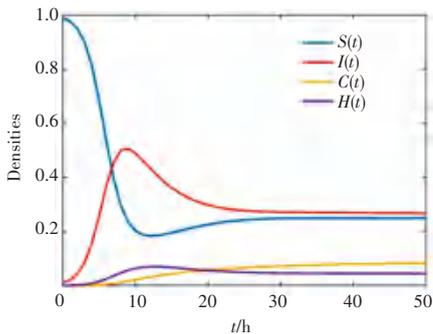
为了验证系统(式(4))的局部渐近稳定, 选择参数 $\bar{k} = 2, b = 0.01, \beta = 0.5, \eta = 0.2, \varepsilon = 0.1, \sigma = 0.05, \varphi = 0.05, \delta = 0.1, \theta = 0.1, \mu = 0.1$ 。通过计算可得 $R_0 = 0.4 < 1, \varepsilon + \varphi = 0.15 > \eta k b / \varepsilon = 0.04$, $E_0 = (0.1, 0, 0, 0)$, 由定理 1 可知系统在 E_0 处是局部渐近稳定的。由图 2(a)可知易感者、感染者、辟谣者和冷静者种群密度最终分别稳定至 0.1, 0, 0, 0 处, 此时系统在 E_0 处是局部渐近稳定的, 仿真结果与理论相符。设 $\bar{k} = 2, b = 0.1, \beta = 0.5, \eta = 0.2, \varepsilon = 0.1, \sigma = 0.05, \varphi = 0.05, \delta = 0.1, \theta = 0.1, \mu = 0.1$ 。

通过计算可得 $P_3(P_1P_2 - P_3) - P_1^2P_4 \approx 0.001 > 0$, $P_1P_2 - P_3 \approx 0.114 > 0$, 由定理2可知系统在 E_* 处是局部渐近稳定的。由图2(b)可知易感者、感染者、辟谣者和冷静者种群密度最终稳定至 E_* 处。

图3表示系统(式(4))的全局渐近稳定性,其中 $k=2, b=0.01, \beta=0.5, \eta=0.2, \varepsilon=0.1, \sigma=0.05, \varphi=0.05, \delta=0.1, \theta=0.1, \mu=0.1$ 。通过计算可得 $R_0=0.4 < 1, E_0=(0.1, 0, 0, 0)$ 。任意5组初始值: $N_{01}=(0.30, 0.60, 0.58, 0.20), N_{02}=(0.40, 0.50, 0.55, 0.30), N_{03}=(0.50, 0.40, 0.50, 0.40), N_{04}=(0.60, 0.30, 0.45, 0.50), N_{05}=(0.70, 0.20, 0.40, 0.60)$ 。如图3所示,最终都收敛至 E_0 处,那么系统在 E_0 处是全局渐近稳定的。



(a) 模型在 E_0 处的局部渐近稳定性



(b) 模型在 E_* 处的局部渐近稳定性

图2 模型的局部渐近稳定性

Fig. 2 Local asymptotic stability of the model

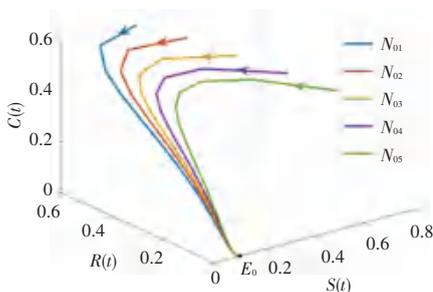
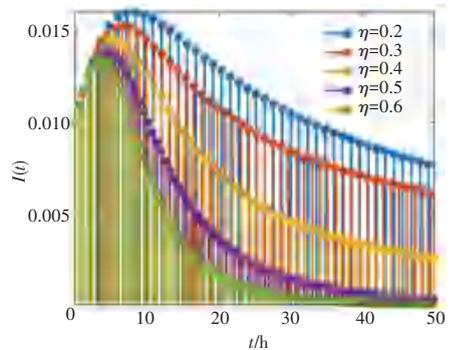


图3 模型在 E_0 处的全局渐近稳定性

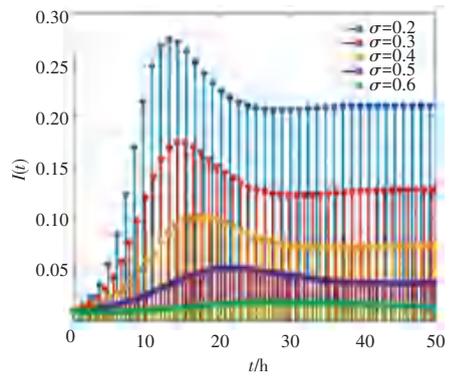
Fig. 3 Global asymptotic stability of the model at E_0

图4(a)表示不同的辟谣率 η 对于谣言传播的影响。从图中可以看出辟谣率越大,感染者密度曲线峰值越小,这意味着提高辟谣率能够抑制谣言的传播。由图4(b)可知冷静率越大,感染者密度曲线峰值越小,代表了提高冷静率也能够抑制谣言的传播。

图5为SICHR模型与SIR、SICR和SIHR的对比图。由图5可知,SICHR模型的感染者密度曲线峰值最小,在抑制谣言传播方面效果更好。这给予了一定启发,当谣言频发,政府需迅速澄清,并鼓励网民主动辟谣。网络平台亦应普及法律知识,让网民认识谣言传播的严重性,共同维护健康网络环境。



(a) 不同 η 对应的感染者密度情况



(b) 不同 σ 对应的感染者密度情况

图4 不同参数对于谣言传播的影响

Fig. 4 Influence of different parameters on rumor propagation

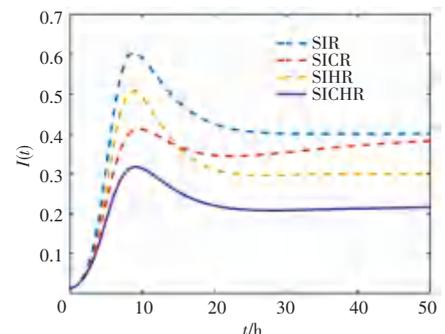
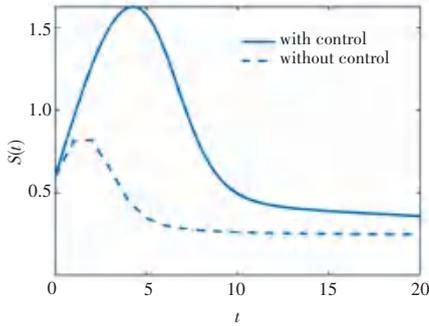


图5 SICHR模型与SIR、SICR和SIHR的对比

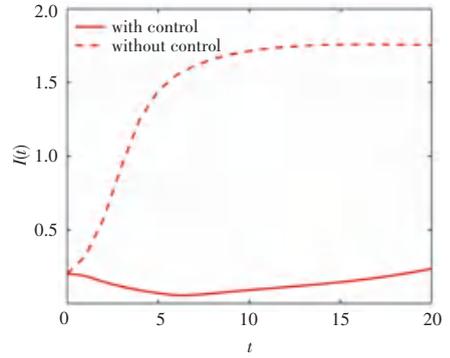
Fig. 5 Comparison of SICHR model with SIR, SICR and SIHR

下面对有无控制的 SICHR 谣言传播模型进行比较。假设 $k_1 = 0.2, k_2 = 0.5$ 。从图 6(a) 可以看出, 与没有最优控制的模型相比, 有最优控制的模型表现出更高的易感者种群密度。由图 6(b) 可知, 考虑最优控制的模型的感染者种群密度小于没有最优控制的模型。从图 6(c) 和图 6(d) 可知, 控制策略

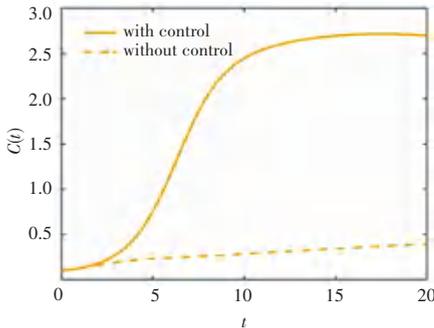
对冷静者和辟谣者的种群密度变化也有着一定影响。因此, 本文提出的控制策略能够有效控制谣言的传播。图 7 显示了控制变量中的变化。从图 7 可以看出, 控制变量 $u(t)$ 呈现了先上升后下降的波动, 直至最后到 0 处。这表明, 经过了谣言爆发的控制时间段之后, 其会随着时间的推移逐渐减弱。



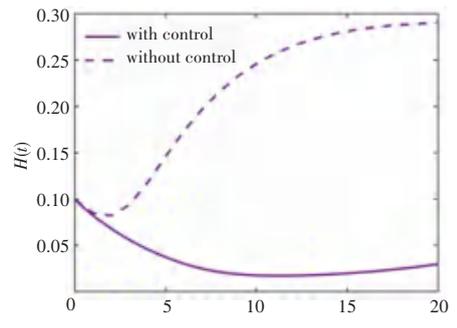
(a) 易感者密度曲线图



(b) 感染者密度曲线图



(c) 辟谣者密度曲线图



(d) 冷静者密度曲线图

图 6 种群密度变化图

Fig. 6 Population density change map

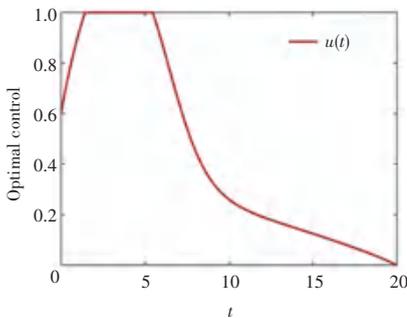


图 7 控制变量的变化图

Fig. 7 Changes of control variables

6 结束语

本文在 SIR 模型的基础上, 考虑冷静和辟谣机制, 构建了一个 SICHR 谣言传播模型。利用下一代矩阵法得到了基本再生数 $R_0 = \beta kb / [\varepsilon(\varepsilon + \sigma + \delta)]$ 。当 $R_0 < 1$ 且 $\varepsilon + \varphi > \eta kb / \varepsilon$ 时, 在 E_0 处是局部

渐近稳定的。当 $P_1 P_2 - P_3 > 0$ 且 $P_3(P_1 P_2 - P_3) - P_1^2 P_4 > 0$ 时, 模型在 E_* 处是局部渐近稳定的。如果 $R_0 < 1$, 那么模型在 E_0 处是全局渐近稳定的。提出了一种最优控制策略, 得到 $u^* = \max\{\min\{(\rho_2 - \rho_1)\beta k S^* I^* / k_2, 1\}, 0\}$ 。由仿真可知, 综合考虑冷静和辟谣机制以及平台审核措施能够更好的抑制谣言的传播。

参考文献

- [1] 王旭丽, 吴恋, 刘然, 等. 网络谣言的传播机制研究[J]. 电脑知识与技术, 2019, 15(5): 48-49.
- [2] DALEY D J, KENDALL D G. Epidemics and rumours[J]. Nature, 1964, 204(4963): 1118.
- [3] MAKI D P. Mathematical models and applications: With emphasis on the social, life, and management sciences[J]. Mathematics Teacher, 1973, 51(3): 201-206.
- [4] ZANELTE D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks[J]. Physical Review E, 2002, 65(4): 041908.
- [5] MORENO Y, NEKOVEE M, PACHECO A F. Dynamics of

- rumor spreading in complex networks[J]. *Physical Review E*, 2004, 69(6): 066130.
- [6] YU Y, LIU J, REN J, et al. Stability analysis and optimal control of a rumor propagation model based on two communication modes: friends and marketing account pushing[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2022, 19(5): 4407-4428.
- [7] TONG X, JIANG H, QIU J, et al. Dynamic analysis of the ifcd rumor propagation model under stochastic disturbance on heterogeneous networks[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 173: 113637.
- [8] LUO X, JIANG H, CHEN S, et al. Stability and optimal control for delayed rumor-spreading model with nonlinear incidence over heterogeneous networks[J]. *Chinese Physics B*, 2023, 32(5): 058702.
- [9] JIANG G, LI S, LI M. Dynamic rumor spreading of public opinion reversal on Weibo based on a two-stage SPNR model[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 558: 125005.
- [10] HU J, ZHU L, PENG M. Analysis of Turing patterns and amplitude equations in general forms under a reaction - diffusion rumor propagation system with Allee effect and time delay[J]. *Information Sciences*, 2022, 596: 501-519.
- [11] CHOI S H, SEO H. Rumor spreading dynamics with an online reservoir and its asymptotic stability [J]. *Networks and Heterogeneous Media*, 2021, 16(4): 535-552.
- [12] YAO Y, XIAO X, ZHANG C, et al. Stability analysis of an SDILR model based on rumor recurrence on social media[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 535: 122236.
- [13] YU Z, ZI H, ZHANG Y, et al. Dynamic modeling and simulation of double-rumor spreaders in online social networks with IS2TR model [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 78(4): 1-25.
- [14] GUO H, YAN X. Dynamic modeling and simulation of rumor propagation based on the double refutation mechanism [J]. *Information Sciences*, 2023, 630: 385-402.
- [15] GHOSH M, MISRA A K, DAS P. Analysis of a delayed MISCR rumor spread model with refutation mechanism[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2024, 139(6): 562.
- [16] JIE B, HU Y. Dynamic analysis of rumor propagation model based on a familiarity mechanism and refuters [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2025, 541(2): 128689.
- [17] PAN W, YAN W, HU Y, et al. Dynamic analysis of a SIDRW rumor propagation model considering the effect of media reports and rumor refuters [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(4): 3925-3936.
- [18] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [19] MISRA A K, SHARMA A, SINGH V. Effect of awareness programs in controlling the prevalence of an epidemic with time delay[J]. *Journal of Biological Systems*, 2011, 19(2): 389-402.
- [20] LA SALLE J P. *The Stability of Dynamical Systems* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.