彭柯瑞,黄洋,肖能飞扬,等. 基于 Koopman 算子的刀具寿命预测方法研究[J]. 智能计算机与应用,2026,16(5):28-35.
DOI:10.20169/j.issn.2095-2163.24070304

基于 Koopman 算子的刀具寿命预测方法研究

彭柯瑞[1], 黄 洋[1], 肖能飞扬[1], 周海洋[2], 彭必友[3]
(1 中核建中核燃料元件有限公司, 四川 宜宾 644000; 2 深圳大学 材料学院, 广东 深圳 518060;
3 西华大学 材料科学与工程学院, 成都 610039)

摘 要: 针对刀具使用寿命预测精度不足的问题,本文提出了一种基于 Koopman 算子理论的刀具寿命预测方法。通过数据驱动算法建立刀具加工参数与刀具寿命之间的非线性映射关系, 挖掘非线性系统的特征和规律,提高刀具寿命预测的准确性。实验结果表明,与传统的基于线性状态空间模型的预测方法相比,所建立的 Koopman 线性和 Koopman 非线性模型预测精度分别提高了 51.41%和 52.09%。此外,单项式基函数的建模和预测精度较高且具有通用性,可作为建立刀具寿命预测模型的最佳选择。综上所述,基于 Koopman 算子理论的预测方法在提高刀具寿命预测准确性方面展现出更优的性能,进一步确保了零部件制造过程的效率和可靠性。

关键词: 刀具; 寿命预测; Koopman 算子理论; 基函数
中图分类号: TP 301.6 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-2163(2026)05-0028-08

Research on tool life prediction method based on Koopman operator

PENG Kerui[1], HUANG Yang[1], XIAO Nengfeiyang[1], ZHOU Haiyang[2], PENG Biyou[3]
(1 CNNC Jianzhong Nuclear Fuel Co., Ltd., Yibin 644000, Sichuan, China;
2 College of Materials Science and Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, Guangdong, China;
3 School of Materials Science and Engineering, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: To address the problem of low accuracy in tool life prediction, this paper proposes a tool life prediction method based on Koopman operator theory. The nonlinear mapping relationship between machining parameters and tool life is established based on the data-driven algorithm, and the features and rules of the nonlinear system are explored to improve the accuracy of tool life prediction. The experimental results indicate that the accuracy of the established Koopman linear and Koopman nonlinear models is improved by 51.41% and 52.09%, respectively, compared with the traditional prediction method based on linear state-space models. In addition, the modelling and prediction by the monomial basis function have high accuracy and generality, which can be considered as the best choice for establishing tool life prediction models. In summary, the prediction method based on the Koopman operator theory demonstrates better performance in improving the accuracy of tool life prediction, which further ensures the efficiency and reliability of the component manufacturing process.

Key words: tool; life prediction; Koopman operator theory; basis function

0 引 言

当今的零部件制造业中,智能制造引起了业界的广泛关注,其代表了新一代智能化信息技术与前沿制造技术融合的尖端发展方向[1-2]。其中,刀具性能会直接影响产品加工的质量、生产效率及制造成本。刀具在持续使用过程中会因磨损和老化导致性能下降,最终失效。精确预测刀具剩余寿命对于确保制造流程的高效性和可靠性至关重要[3]。然而,现有的刀具寿命预测技术主要依赖于经验性模型与统计方法[4-5],这些方法往往需要依靠大量的实验数据,并且面对复杂多变的生产环境和不同的刀具品牌时,其适用性和灵活性面临着严峻的挑战。

近年来,随着机器学习和深度学习等技术的快速发展,基于数据驱动算法构建预测模型已成为工业界发展的新趋势[6-8]。特别是在刀具寿命预测领

基金项目: 国家自然科学基金 (52108229)。
作者简介: 彭柯瑞(1998—),男,硕士,工程师。主要研究方向:工业自动化控制。
通信作者: 黄 洋(1976—),男,学士,高级工程师。主要研究方向:核燃料零部件加工。Email:1135697976@qq.com。
收稿日期: 2024-07-03

域，数据驱动算法的应用逐渐展现出其显著的潜力和价值，国内外学者已开展大量相关研究[9]。燕洋妞等[10]建立了基于 BP 神经网络结合双对数算法的刀具磨损分析与寿命预测模型，仿真结果表明该模型具备良好的预测精度。李超文等[11]建立了基于 BP 神经网络的刀具寿命预测模型，同时结合了 NSGA-Ⅱ算法对工艺参数进行多目标优化方法，优化结果证明了该方法的有效性。Duan 等[12]研究了一种基于混合注意力的并行深度学习模型，用于对刀具磨损状态监测和对使用寿命进行预测，实验结果表明，该模型独特的并行结构使其获得了较好的预测性能。Yao 等[13]研究了一种基于长短期记忆网络的剩余寿命预测方法，预测结果表明，该方法对刀具磨损情况和剩余寿命预测具有较高的准确性和泛化能力。

本文旨在研究基于 Koopman 算子的刀具寿命预测方法，具体围绕 Koopman 算子建立刀具加工参数与使用寿命的非线性映射关系模型，并基于所建立的 Koopman 模型对刀具的剩余寿命进行准确预测。随后，利用数据集验证所提方法的有效性与准确性。此外，在利用扩展动态模态分解（EDMD）算法近似 Koopman 算子的过程中，基函数的选择至关重要，会直接影响模型精度。本文还针对基函数的选择展开研究，筛选出适用于刀具寿命预测模型构建的最优基函数。本研究的开展不仅能够提高刀具寿命预测的准确性，还能够为刀具健康管理和智能维护系统的开发提供理论基础和技术支持，最终推动智能制造体系持续完善与发展。

1　基于 Koopman 算子的建模方法

1.1　基于 Koopman 算子的刀具寿命预测模型

Koopman 算子是一种可通过全局线性化方法来处理非线性系统并可将其转换为高维的线性系统的线性算子[14-16]。

对于任意具有外部输入的离散时间非线性动态系统，其状态值随时间的演化关系可表示为：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}_k \in U \subset \mathbb{R}^m$ 表示系统的状态向量和输入向量；$F(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)$ 表示当前系统状态值到下一时刻状态值的映射；$k \in \mathbb{Z}$ 表示时间步。

可将该系统提升至由紧凑域 $\boldsymbol{X} \times U \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ 中的所有平方可积实值函数组成的无限维函数空间 $\mathcal{F}$。无限维函数空间 $\mathcal{F}$ 中的所有元素被称为可观测值，系统演化则可由 Koopman 算子 $K_d: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 来表示。根据以下定义，Koopman 算子可以描述观测值 $f \in \mathcal{F}$ 沿系统轨迹的演化过程：

$$\mathcal{K}_d \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi} \circ f \tag{2}$$

其中，$\mathcal{K}_d$ 为离散时间的 Koopman 算子；$\circ$ 为 ψ 与 f 的函数复合运算；$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 表示提升空间中的观测值。式(2)可进一步表示为：

$$(\mathcal{K}_d \boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{\psi} \circ f = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+1}) \tag{3}$$

因此，Koopman 算子为无限维空间中非线性系统可观测变量随时间的演化过程提供了线性表示，其线性演化过程如图 1 所示。

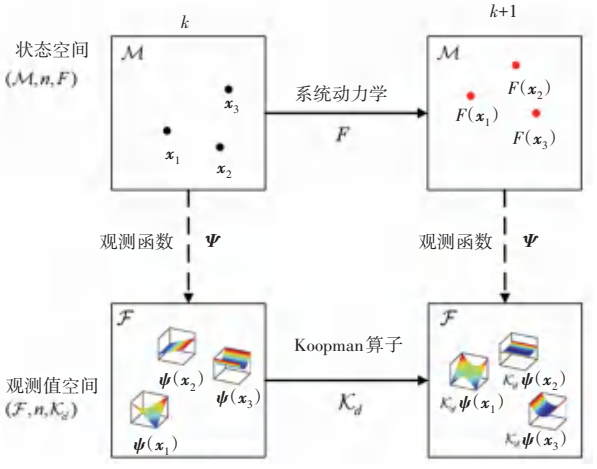


图 1　Koopman 算子线性演化示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the linear evolution of the Koopman operator

1.2　Koopman 模型的实现

1.2.1　EDMD 算法

由于 Koopman 算子是一个无限维的线性算子，在实际应用过程中需要用有限维矩阵表示[17]。基于 EDMD 算法，可以通过将观测数据应用于线性回归从而获取 Koopman 算子的有限维近似矩阵[18-19]。可以使用数据来解决最小二乘的最小化问题，从而推导出 Koopman 算子的近似表示。在离散时间条件下的最小化形式如下：

$$\bar{\mathcal{K}}_d^* = \underset{\bar{K}_d}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2} \| \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+1}) - \bar{\mathcal{K}}_d \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \|^2 \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\psi}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \cdots, \boldsymbol{\psi}_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}$ 为一组基函数，K 为数据测量次数。此外，上面的表达式还可以用一个闭式解来表示：

$$\bar{\mathcal{K}}_d^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\dagger} \tag{5}$$

其中，† 是摩尔-彭罗斯伪逆，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 可分别表示为：

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{u}_{k+1})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为交叉协方差距阵，K 为数据样本总数，$\Psi(\cdot)$ 为基函数映射，$\boldsymbol{G}$ 为自协方差矩阵。

1.2.2 Koopman 线性模型的建立

考虑 Koopman 算子的表示形式如下：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{u}_{k+1}) = \bar{\mathcal{K}}_d\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k) \tag{8}$$

令 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}$，$\bar{\mathcal{K}}_d$ 可以重构为以下形式：

$$\bar{\mathcal{K}}_d = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{(N-m)\times(N-m)} & \boldsymbol{B}_{(N-m)\times m}\\ \boldsymbol{O}_{m\times(N-m)} & \boldsymbol{I}_{m\times m}\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u})$ 分别是与状态和输入相关的函数，下标表示每个矩阵的维数；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可以描述状态相关函数的动力学的子矩阵和输入对状态相关函数的影响子矩阵；$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 分别表示单位矩阵和零矩阵。因此，公式(8)可改写为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_{k+1})\\ \boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u}_{k+1})\end{bmatrix} = \bar{\mathcal{K}}_d\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k)\\ \boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u}_k)\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\psi}_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{\psi}_{N-m}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N-m}$ 表示和系统状态相关的函数，而 $\boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\psi}_{N-m+1}(u),\boldsymbol{\psi}_{N-m+2}(\boldsymbol{u}),\cdots,\boldsymbol{\psi}_N(\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ 则是和系统输入相关的函数。

选择一组合适的基函数 $\boldsymbol{\psi} = \{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^{N}$，可以将式(8)分解成如下形式的线性系统：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{k+1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k\\ \hat{\boldsymbol{x}}_k &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_k\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k)$，$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{\psi}_u(\boldsymbol{u}_k)$，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\hat{\boldsymbol{x}}_0$ 是状态空间中的初始条件，$\boldsymbol{z}_0$ 是初始提升状态，$\boldsymbol{u}_k \in U \subset \mathbb{R}^m$ 是第 k 步的输入。输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{I}_{n\times n} \quad \boldsymbol{O}_{n\times(N-n)}] \tag{12}$$

近似最优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 则可以通过将公式(11)代入(4)并求解最小二乘所得：

$$\arg\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_{k+1}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k\|^2 \tag{13}$$

1.2.3 Koopman 非线性模型的建立

令 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\psi}_x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\psi}_{x,u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}$，$\bar{\mathcal{K}}_d$ 可以重构为以下形式：

$$\bar{\mathcal{K}}_d = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times(N-n)}\\ * & *\end{bmatrix} \tag{14}$$

针对 Koopman 非线性模型，公式(8)可以改写为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_{k+1})\\ \boldsymbol{\psi}_{x,u}(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{u}_{k+1})\end{bmatrix} = \bar{\mathcal{K}}_d\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k)\\ \boldsymbol{\psi}_{x,u}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\psi}_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{\psi}_n(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 是和系统状态相关的函数，$\boldsymbol{\psi}_{x,u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\psi}_{N-n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\psi}_{N-n+2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\cdots,\boldsymbol{\psi}_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N-n}$ 是同时与系统输入和状态相关的函数。此外，带有输入的离散非线性动力系统可以表示为以下形式：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k) \tag{16}$$

其中，$F:\boldsymbol{X}\times U \to \mathbb{R}^n$ 表示非线性离散映射。

选择一组合适的基函数 $\boldsymbol{\psi} = \{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^{N}$，公式(16)中的非线性离散映射函数 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 可以由 Koopman 算子进一步构造为：

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) &= [I_{n\times n} \quad O_{n\times(N-n)}]\,\bar{\mathcal{K}}_d\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) =\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\psi}_{x,u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{17}$$

同理，$\bar{\mathcal{K}}_d$ 中的系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以通过以下形式求解：

$$\begin{aligned}\arg\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_{k+1}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k) -\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{\psi}_{x,u}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)\|^2\end{aligned} \tag{18}$$

1.2.4 基函数的选择与数值计算

EDMD 算法理论和 Koopman 模型实现过程中，为获取非线性系统 Koopman 算子的最优近似矩阵，必须选择一组合适的基函数向量。

最常用的基函数类型包括单项式基函数、高斯基函数(径向基函数)和傅里叶基函数等。选定的基函数及其维度计算方程见表 1。对于傅里叶 d_i 和 e_i 表示傅里叶系数。L 表示离散时间信号的长度。在基函数的维数方程中，ρ 表示基函数的最大次数，m 表征系统的状态。对于 Koopman 线性模型，m 的大小与 $x_k,\cdots,x_{k-d},u_{k-d}$ 的数量有关，其中 d 表示延迟的次数，N 表示基函数的维度。对于 Koopman 非线性模型，m 的大小与 $x_k,\cdots,x_{k-d},u_k,u_{k-d}$ 的数量有关。

1.2.5 实际建模因素考虑

在实际运用 Koopman 算子进行非线性系统建模时需要构造快照对以及解决过拟合和稀疏性问题。

具体采用 K 个离散测量值来构造快照对 $\{a_k,b_k,u_k\}_{k=1}^{K}$ 从而实现通过实际实验数据来近似 Koopman 算子，其表达形式为：

$$\begin{cases}a_k := \boldsymbol{x}_k\\ b_k := \boldsymbol{x}_{k+1}\end{cases} \tag{19}$$

表 1　基函数的表达式和维度方程

Table 1　Expressions and dimension equations for basis functions

类型	表达式	维度
单项式	$\boldsymbol{x}_1^{s_1},\boldsymbol{x}_2^{s_2}\cdots\boldsymbol{x}_n^{s_n}(s_1,s_2\cdots s_n\in\mathbb{N}^n)$	$N=\dfrac{(m+1)\cdots(m+\rho)}{\rho!}-1$
高斯	$\exp\left(-\dfrac{\Vert\boldsymbol{x}-c_i\Vert^2}{{\sigma_i}^2}\right)(c_i\in[-1,1])$	$N=\rho$
傅里叶	$f(\boldsymbol{x})=d_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(d_i\cos\dfrac{i\pi\boldsymbol{x}}{L}+e_i\sin\dfrac{i\pi\boldsymbol{x}}{L}\right)$	$N=(1+2\rho)^m-1$

对所有快照对进行提升(升维)处理,并将其改写为以下形式矩阵:

$$\boldsymbol{\psi}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{u}_1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\psi}(a_2,\boldsymbol{u}_2)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\psi}(a_K,\boldsymbol{u}_K)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\psi}_b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(b_1,\boldsymbol{u}_1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\psi}(b_2,\boldsymbol{u}_2)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\psi}(b_K,\boldsymbol{u}_K)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{20}$$

所以,$\bar{\mathcal{K}}_d$ 可以通过构造适合所有观测数据的最小二乘法进行计算,其形式如下式:

$$\bar{\mathcal{K}}_d=\boldsymbol{\psi}_b\boldsymbol{\psi}_a^{\dagger}\tag{21}$$

在实际建模时,需要将延迟 d 被合并到快照对集合中,从而获得一个更精确的模型,可以表示为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_k=[\boldsymbol{x}_k,\cdots,\boldsymbol{x}_{k-d},\boldsymbol{u}_{k-1},\cdots,\boldsymbol{u}_{k-d}]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_k=[\boldsymbol{x}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{k-d+1},\boldsymbol{u}_{k-1},\cdots,\boldsymbol{u}_{k-d}]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{22}$$

式中:$\boldsymbol{a}_k$ 为第 k 个输入快照向量,$\boldsymbol{b}_k$ 为第 k 个输出快照向量,$\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{u}_k$ 分别为系统在第 k 时刻的状态向量和输入向量,d 为延迟步数。

基于 Koopman 算子对非线性系统分别建立线性和非线性模型的流程可以通过算法 1 实现,见表 2,其中输入是快照对 $\{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{u}_k)\}_{k=1}^{K}$ 和延迟数 d,输出为表征 Koopman 模型的最优近似矩阵以及非线性离散映射。

表 2　基于 Koopman 算子构建系统的线性和非线性模型

Table 2　Linear and nonlinear models of the system based on Koopman operators

算法 1:基于 Koopman 算子的建模过程
输入:快照对 $\{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{u}_k)\}_{k=1}^{K}$ 和延迟数 d
1 选择候选的基函数
2 For $\rho=1,2,\cdots$ 执行
(1) 利用式(20)数据进行提升处理
(2) 利用式(21)Koopman 算子 $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_d$ 的最优近似
(3) 利用式(9)获取线性模型的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 矩阵;利用式(14)获取非线性模型的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 矩阵
(4) (可选):步骤 2-3 也可以分别通过式(13)和(18)进行求解
(5) 利用式子(29)计算 NRMSE 值
End
3 (可选):针对线性和双线性模型,利用式(26)获取投影矩阵 $\boldsymbol{P}$
4 得到基函数的最优次 ρ
返回:线性模型(11),非线性模型(16)
输出:线性模型 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,非线性模型:$F$

基于 Koopman 算子的数据驱动建模方法存在一个明显缺陷是容易出现过拟合。为防止在辨识 $\bar{\boldsymbol{K}}_d$ 过程中出现过拟合,本文采用最小绝对收缩和选择算子(LASSO)的 $L1$ 正则化方法[20]。

$$\bar{\boldsymbol{K}}_d=\arg\min_{\boldsymbol{K}_d}\Vert\boldsymbol{\psi}_a\cdot\boldsymbol{K}_d-\boldsymbol{\psi}_b\Vert^2+\lambda\Vert\boldsymbol{K}_d\Vert_1\tag{23}$$

其中,$\lambda\in\mathbb{R}^+$ 表示 $L1$ 惩罚项的权重,$\Vert\cdot\Vert$ 为矩阵 $L1$ 范数。

在 Koopman 线性模型实现中,升维和映射过程容易出现偏离现象,从而影响模型预测精度。如图 2 所示,提升函数从映射 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathcal{M}$。然而,在其中的某一个时间步 j,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k$ 会出现无法映射到 $\mathcal{M}$ 的现象。当偏移现象出现时,容易导致所生成的 Koopman 模型的预测并不准确。为减少稀疏性造成的预测误差,需要在每个时间步引入投影算子 P,该算子可以将空间中的某个向量投影到子空间中并基于线性变换对其进行线性组合。

在 Koopman 线性模型实现时,对于每个快照

对,理想投影算子 P 需要满足以下条件:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x}_{k+1}) \tag{24}$$

式中:$\boldsymbol{P}$ 为投影算子,$\boldsymbol{A}$ 为 Kopman 线性模型的状态矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 Koopman 线性模型的输入矩阵,$\boldsymbol{\psi}_x$ 为提升函数,$\boldsymbol{x}_k$ 为第 k 时刻的系统状态向量。

为得到投影算子 $\boldsymbol{P}$ 的精确近似,需要构造如下形式的 $K \times N$ 矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_a$:

$$\boldsymbol{\Omega}_a = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(x_1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}_x(x_K) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_K)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

所以,*L*2 范数意义下的最佳投影算子 $\boldsymbol{P}$ 表达式表示为:

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\Omega}_a^{\dagger}\boldsymbol{\psi}_b)^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

将所得的最优投影算子 $\boldsymbol{P}$ 与式 2 ~ 式 13 中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵结合,可以得到一个改进的 Koopman 线性模型:

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}_k + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}_k \tag{27}$$

式中:$\hat{\boldsymbol{A}}$ 为改进后的状态矩阵,$\hat{\boldsymbol{B}}$ 为改进后的输入矩阵。$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$,$\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$。

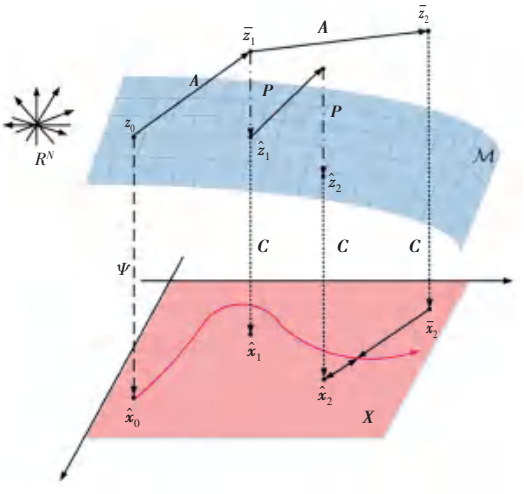


图 2 模型偏离及投影算子 P 示意图

Fig. 2 Schematic diagram of model deviation and projection operator P

2 基于 Koopman 算子的刀具寿命建模方法研究

2.1 实验数据的获取与预处理

根据相关文献可知,对刀具寿命影响因素主要包括切削方式、加工状态、工件材料等[21]。刀具寿命经验公式为:

$$T = \frac{C_T D^n}{V_c a_p^{\ x} a_e^{\ y} f_z^{\ p} Z^q} \tag{28}$$

式中:C_T 为刀具耐用度系数,V_c 为切削速度,a_p 为切削深度,a_e 为切削宽度,f_z 为每齿进给量,Z 为刀具齿数,D 为刀具直径,x、y、p、q、u 为刀具寿命影响指数。

本文选择将上述加工参数作为 Koopman 模型的输入值,即选择刀具直径、铣削速度、铣削深度、铣削宽度、进给量以及刀具齿数。刀具使用寿命作为 Koopman 模型的输出值。使用 Matlab2020 建立 Koopman 模型进行实验,所使用的系统具体参数见表 3。

表 3 系统具体参数

Table 3 Detailed parameters of the system

设备名词	参数详情
CPU	Intel(R) Core(TM) i7-10750H
GPU	Intel(R) UHD Graphics 630
操作系统	Windows 10 x64
内存	16 GB

实验数据从现有的 2 台德玛吉卧式加工中心和 5 台小巨人立式加工中心中获取。共获取实际生产中约 2 年的 1 500 组输入输出数据对(1 200 组作为训练集,300 组作为测试集),用于建立 Koopman 线性、非线性模型和线性状态空间。实验样本如图 3 所示,主要包括铣削加工使用的硬质合金立铣刀、高速钢立铣刀和面铣刀等,加工方式主要涵盖粗铣、半精铣和精铣等。



图 3 实验样本

Fig. 3 Experimental sample

2.2 模型精度对比

本文采用归一化均方根误差(NRMSE)作为评估指标对上述 3 种模型的精度(拟合优度)进行量化,其计算公式如下:

$$\mathrm{NRMSE} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(s_{\mathrm{real}} - s_{\mathrm{des}})^2}}{\max(s_{\mathrm{real}}) - \min(s_{\mathrm{real}})} \tag{29}$$

其中,m 表示数据点总数;s_{real} 表示实验测量值;s_{des} 表示期望输出值。

3 结果与分析

3.1 建模结果

基于训练集数据,构建了刀具加工参数与刀具使用寿命之间的状态空间线性模型。建模结果如图 4

所示。其中，红色实现代表期望值，蓝色点划线代表线性状态空间模型的输出值，选择第 400~600 个实验数据点的拟合效果进行局部放大，用于观察拟合效果。

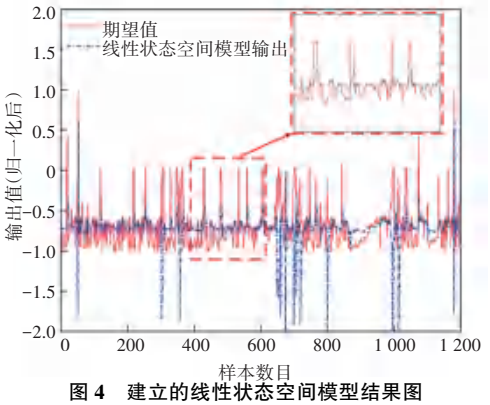


图 4　建立的线性状态空间模型结果图

Fig. 4　Results of the linear state-space model

Koopman 线性、非线性模型的建模结果分别如图 5—6 所示。其中，以单项式作为基函数，其最大自由度数 ρ 和延时数 d 均设置为 2。

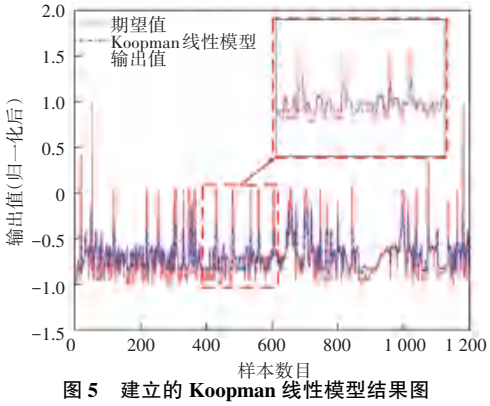


图 5　建立的 Koopman 线性模型结果图

Fig. 5　Results of the Koopman linear model

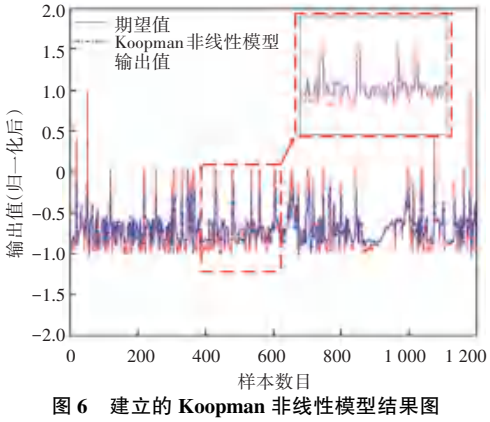


图 6　建立的 Koopman 非线性模型结果图

Fig. 6　Results of the Koopman nonlinear model

针对刀具加工参数-使用寿命，本文建立了 Koopman 线性模型、Koopman 非线性模型与线性状态空间模型，3 种结果对比见表 4，其中包括了基函数最大自由度数、延迟数及相比于线性状态空间模型的改善比。

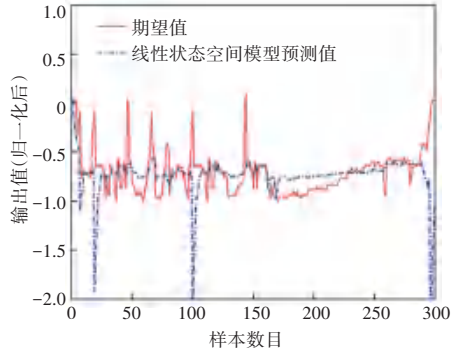
表 4　Koopman 线性、Koopman 非线性模型和线性状态空间模型精度对比

Table 4　Accuracy comparison of Koopman linear, Koopman nonlinear and linear state-space models

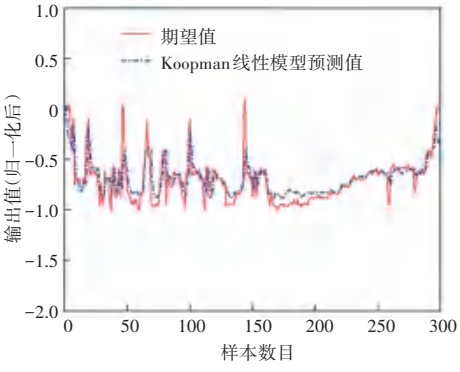
类型	最大自由度数	延迟数	NRMSE	改善比/%
线性状态空间模型			0.186 2	
Koopman 线性模型	2	1	0.105 4	43.39
Koopman 非线性模型	2	1	0.103 4	44.47

3.2　预测结果

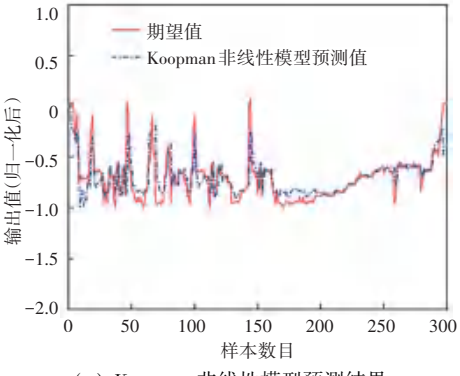
所构建的线性状态空间、Koopman 线性模型和 Koopman 非线性模型对刀具寿命的预测结果对比如图 7 所示。3 种模型的预测精度对比见表 5，其中包括了基函数最大自由度数、延迟数和相比于线性状态空间模型的改善比。



(a) 线性状态空间模型预测结果



(b) Koopman 线性模型预测结果



(c) Koopman 非线性模型预测结果

图 7　3 种模型的预测结果对比

Fig. 7　Comparison of the prediction results of the three models

表 5 Koopman 线性模型、Koopman 非线性模型和线性状态空间模型预测精度对比

Table 5 Comparison of prediction accuracy among Koopman linear, Koopman nonlinear and linear state - space models

类型	最大自由度数	延迟数	NRMSE	改善比/%
线性状态空间模型			0.311 4	
Koopman 线性模型	2	1	0.151 3	51.41
Koopman 非线性模型	2	1	0.149 2	52.09

3.3 基于不同基函数的建模和预测结果

基于 3 种基函数(单项式、高斯基和傅里叶)建立的 Koopman 线性和 Koopman 非线性模型精度对比如图 8 所示。

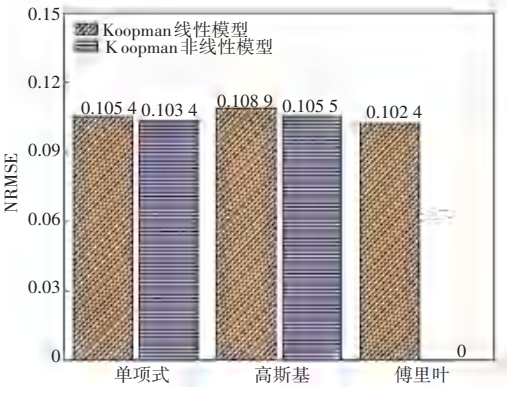


图 8 三基函数建立的 Koopman 线性、Koopman 非线性模型精度对比

Fig. 8 Comparison of the accuracy of Koopman linear and Koopman nonlinear models based on three-basis functions

基于 3 种基函数(单项式、高斯基和傅里叶)建立的 Koopman 线性和 Koopman 非线性模型对刀具使用寿命的预测精度对比如图 9 所示。

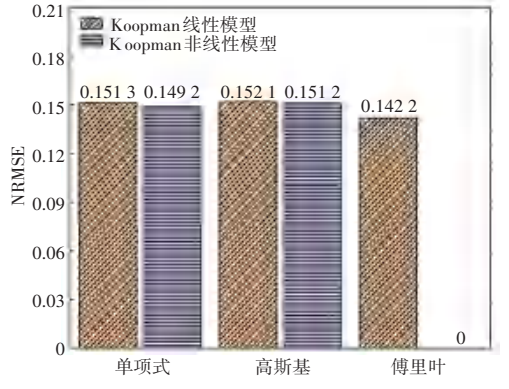


图 9 三基函数建立的 Koopman 线性、Koopman 非线性模型预测精度对比

Fig. 9 Comparison of prediction accuracy of Koopman linear and Koopman nonlinear models based on three-basis functions

3.4 讨论与分析

针对建模和预测方面,由表 4 中结果可知,基于 Koopman 算子的刀具加工参数-使用寿命非线性关系的全局线性化建模策略的建模精度更高,且各项指标都优于状态空间的局部线性化建模方法。所建立的 Koopman 线性模型精度相对于线性状态空间的建模方法提高了 43.39%,非线性建模则提高了 44.47%。

对于所建模型的刀具寿命预测精度,由表 5 中结果可知,Koopman 线性模型预测精度相比于线性状态空间模型提高了 51.41%,Koopman 非线性模型则相比于线性状态空间模型提高了 52.09%。因此,在刀具加工参数-使用寿命的非线性建模和寿命预测方面,Koopman 非线性模型精度略高于 Koopman 线性模型,这两种模型的精度和性能都优于传统的线性状态空间模型。

在基函数的选择方面,由图 8 和图 9 结果可知,基于傅里叶基函数构建的 Koopman 线性模型精度最高,其次是单项式和高斯基函数。在建立 Koopman 非线性模型时,基于单项式基函数建立的 Koopman 非线性模型精度高于高斯基函数。傅里叶基函数出现了不收敛的情况(精度为 0),这是因为该基函数在建立 Koopman 非线性模型时,维度 N 过高且计算量太大,所以出现了拟合结果不收敛和超出了 MATLAB 软件自身存储空间的现象。

4 结束语

针对刀具寿命预测这一能对零部件加工质量有效保障的重要措施,本文提出了一种基于 Koopman 算子的刀具寿命预测模型,并采集实际数据进行实验验证。将建立的 Koopman 线性模型与传统的基于线性状态空间模型进行对比。结果表明,无论是在刀具加工参数-使用寿命非线性关系建模,还是刀具寿命预测环节,两种模型精度均显著优于传统的基于线性状态空间模型。其中,Koopman 非线性模型的精度略优于 Koopman 线性模型。

针对 EDMD 算法中 3 种常用的基函数所构建的 Koopman 模型精度进行了对比分析。结果表明,单项式基函数建立的 Koopman 线性和非线性模型精度较高且具有通用性,优于高斯基函数。傅里叶基函数虽在构建 Koopman 线性模型时略优于单项式基函数,但不具有通用性,即在建立 Koopman 非线性模型时会出现不收敛的情况。

参考文献

[1] 方舟, 黄瑞, 黄波, 等. 数据与知识双驱动的零件特征工艺决策方法[J]. 计算机系统与应用, 2024,33(6):1-8.

[2]曾凡航. 数字孪生驱动的热轧钢卷边裂管控框架[J]. 智能计算机与应用，2023,13(7):89-93.
[3] 刘明浩. 面向铣刀磨损监测的数字孪生系统研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨理工大学，2023.
[4] GAO Z，CECATI C，DING S X. A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques-Part I：Fault diagnosis with model-based and signal-based approaches[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2015,62(6):3757-3767.
[5] 盖小羽. 铣削加工过程刀具磨损及剩余寿命智能监测方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨理工大学，2023.
[6] LIU Z，PENG K，HAN L，et al. Modeling and control of robotic manipulators based on artificial neural networks：A Review[J]. Iranian Journal of Science and Technology，Transactions of Mechanical Engineering，2023,47(4):1307-1347.
[7] 黎嘉明. 空气质量预测的深度学习模型研究与实践[J]. 智能计算机与应用，2024,14(7):182-189.
[8] 王甘霖，靳明明，黄钢. 深度学习与机器学习预测 NSCLC 的 N 分期[J]. 智能计算机与应用，2024,14(4):184-189.
[9] MATSUMURA R，NISHIDA I，SHIRASE K. Tool life prediction in end milling using a combination of machining simulation and tool wear progress data[J]. Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing，2023,17(2):1-12.
[10]燕洋妞，何世文，林孝良，等. 基于 BP 神经网络双对数算法的刀具磨损分析及寿命预测研究[J]. 湖南有色金属，2023,39(6):67-72.
[11]李超文，尹瑞雪. 基于刀具寿命及工艺碳排放预测的数控铣削参数优化研究[J]. 工具技术，2023,57(9):80-85.
[12]DUAN J，ZHANG X，SHI T. A hybrid attention-based paralleled deep learning model for tool wear prediction[J]. Expert Systems with Application，2023,211(c):118548.
[13]YAO J，LU B，ZHANG J. Tool remaining useful life prediction using deep transfer reinforcement learning based on long short-term memory networks[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology，2022,118(3):1077-1086.
[14]PENG K，CHEN W，GUAN S，et al. Hysteresis inversion-free predictive compensation control for soft pneumatic actuators based on a global Koopman modeling strategy[J]. Physica Scripta，2023,98(12):125206.
[15]邹文，张国斌，丰志伟，等. 返回器飞行管道的快速预测算法[J]. 国防科技大学学报，2024,46(1):22-31.
[16]严巍，邹继磊. 基于 Koopman 算子的深度神经网络风电功率预测[J]. 自动化应用，2023,64(17):69-71.
[17]陈竑宇，陈提. 挠性航天器姿态动力学数据驱动辨识与控制[J]. 力学学报，2024,56(2):433-445.
[18]岳崇浩. 基于 Koopman 算子理论的新冠肺炎预测与分析[D]. 武汉:华中科技大学，2022.
[19]彭柯瑞，陈天翼，唐梓轩，等. 基于 Koopman 算子的软体机器人数据驱动建模方法研究[J]. 武汉理工大学学报，2022,44(11):73-78.
[20]BREUDER D，FU X，GILLESPIE R B，et al. Data-driven control of soft robots using Koopman operator theory[J]. IEEE Transactions on Robotics，2020,37(3):948-961.
[21]李建伟，刘成波，郭宏，等. 基于 PSO-RBF 神经网络的刀具寿命预测[J]. 计算机系统应用，2023,31(1):309-314.